

Práctica 2: Introducción a los semiconductores

Autor: Diego L. Peña Colaiocco

Fecha: 9 y 23 de octubre de 2017

Advertencia: Estas notas no han sido revisadas por ningún tercero por lo que probablemente contienen errores.

Índice

	Página
2.1 Resumen	2-1
2.2 Modelo de Kronig-Penney	2-2
2.3 Mecánica estadística	2-4
2.4 Semiconductores en equilibrio y conducción en los sólidos	2-6
2.5 Variación con la temperatura de los parámetros de los semiconductores	2-16
2.6 Semiconductores fuera de equilibrio	2-22
2.7 Fórmulas útiles	2-26
2.7.1 Teoría de bandas de energía de los sólidos	2-26
2.7.2 Mecánica estadística	2-27
2.7.3 Semiconductores en equilibrio	2-28
2.7.4 Conducción en los sólidos	2-30
2.7.5 Semiconductores fuera de equilibrio	2-31
Referencias	2-33

2.1. Resumen

El objetivo de esta práctica es aclarar conceptos y resolver problemas relacionados con el modelo de bandas de los sólidos; la densidad de estados disponibles y la función de Fermi-Dirac; las densidades de portadores en semiconductores en y fuera de equilibrio; y la variación de algunos de los parámetros de los semiconductores con la temperatura.

2.2. Modelo de Kronig-Penney

Ejemplo 2.2.1 En un sólido cristalino unidimensional la ecuación que define las bandas prohibidas de energía es:

$$6 \cdot \frac{\text{sen}(\alpha a)}{\alpha a} + \cos(\alpha a) = \cos(ka)$$

Si $a = 5\text{\AA}$, determine el ancho en eV de las bandas prohibidas que existen en $ka = \pi$, $ka = 2\pi$, $ka = 3\pi$ y en $ka = 4\pi$

Solución:

En la figura 2.1 se muestra la gráfica de la función $y = 6 \cdot \frac{\text{sen}(\alpha a)}{\alpha a} + \cos(\alpha a) = \cos(ka)$ en función de αa , en azul, y líneas correspondientes a $y = 1$ y $y = -1$, en rojo. En la misma se observa, en gris, las regiones correspondientes a las bandas prohibidas de energía junto a su valor correspondiente de αk .

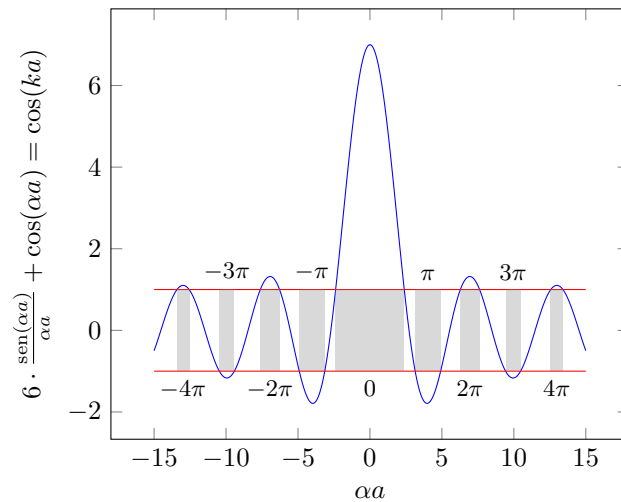


Figura 2.1: Gráfica de la función $y = 6 \cdot \frac{\text{sen}(\alpha a)}{\alpha a} + \cos(\alpha a) = \cos(ka)$ en función de αa , en azul, y líneas correspondientes a $y = 1$ y $y = -1$, en rojo. En gris se resaltan las regiones correspondientes a las bandas prohibidas de energía, junto al valor de αk que les corresponde.

Los anchos buscados se determinarán a partir de la gráfica de la figura 2.1. Para ello se determinará, primero, los puntos en donde la gráfica interseca a las líneas rojas. Esto corresponde a resolver las ecuaciones:

$$6 \cdot \frac{\text{sen}(\alpha a)}{\alpha a} + \cos(\alpha a) = 1$$

$$6 \cdot \frac{\text{sen}(\alpha a)}{\alpha a} + \cos(\alpha a) = -1$$

Es claro que los puntos de la forma $\alpha a = 2\pi n$ son solución de la primera ecuación, y los puntos de la forma $\alpha a = 2\pi n + \pi$ son solución de la segunda. Las otras soluciones se determinan, aproximadamente, mediante ensayo y error o utilizando un algoritmo computacional. Se obtiene entonces que las primeras cinco soluciones de la primera ecuación son, aproximadamente, $\alpha a =$

$\pm 2,385$, $\alpha a = \pm 6,283$, $\alpha a = \pm 7,618$, $\alpha a = \pm 12,566$ y $\alpha a = \pm 13,408$; y que las primeras cuatro soluciones de la segunda ecuación son, aproximadamente, $\alpha a = \pm 3,142$, $\alpha a = \pm 4,911$, $\alpha a = \pm 9,425$ y $\alpha a = \pm 10,466$.

Con esta información se deduce que las bandas de energía prohibidas están delimitadas por los valores mostrados en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Bordes de las bandas prohibidas de energía en función de αa .

Banda prohibida	Primer borde	Segundo borde	$\Delta(\alpha a)^2$
Primera ($\alpha k = \pi$)	3,142	4,911	14,246
Segunda ($\alpha k = 2\pi$)	6,283	7,618	18,558
Tercera ($\alpha k = 3\pi$)	9,425	10,466	20,707
Cuarta ($\alpha k = 4\pi$)	12,566	13,408	21,870

Del modelo de Kronig-Penney se sabe que $\alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, por lo que:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (\alpha)^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2} \\
 \Rightarrow (\alpha a)^2 &= \frac{2mE \cdot a^2}{\hbar^2} \\
 \Rightarrow \Delta(\alpha a)^2 &= \frac{2ma^2}{\hbar^2} \cdot \Delta E \\
 \Rightarrow \Delta E &= \frac{\Delta(\alpha a)^2 \cdot \hbar^2}{2ma^2} = \frac{(6,582 \cdot 10^{-16} \text{eV} \cdot \text{s})^2}{2 \cdot 0,511 \frac{\text{MeV}}{c^2} \cdot (5 \cdot 10^{-10} \text{m})^2} \cdot \Delta(\alpha a)^2 \\
 &= 1,695 \cdot 10^{-18} \frac{\text{eV} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^2} \cdot (3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \cdot \Delta(\alpha a)^2 \\
 &= 0,153 \cdot \Delta(\alpha a)^2
 \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula anterior y los datos de la tabla 2.1 se obtiene que los anchos de las primeras cuatro bandas prohibidas de energía son los mostrados en la tabla 2.2.

Tabla 2.2: Anchos de las primeras cuatro bandas prohibidas de energía

Banda prohibida	Ancho
Primera ($\alpha k = \pi$)	2,180eV
Segunda ($\alpha k = 2\pi$)	2,839eV
Tercera ($\alpha k = 3\pi$)	3,168eV
Cuarta ($\alpha k = 4\pi$)	3,346eV

■

2.3. Mecánica estadística

Ejemplo 2.3.1 Un nuevo material semiconductor tiene una función de densidad de estados dada por:

$$\begin{aligned} g(E) &= \frac{4\pi \cdot m_n^*}{h^2} && \text{para } E_C \leq E \\ g(E) &= 0 && \text{para } E_V < E < E_C \\ g(E) &= \frac{4\pi \cdot m_p^*}{h^2} && \text{para } E \leq E_V \end{aligned}$$

Utilizando la función de Fermi-Dirac determine las expresiones para

- la densidad de electrones.
- la densidad de huecos.
- el nivel de Fermi intrínseco.

Solución:

El número de electrones viene dado por

$$n_0 = \int_{E_C}^{E_C^{sup}} g(E) \cdot f(E) dE = \int_{E_C}^{E_C^{sup}} \frac{4\pi \cdot m_n^*}{h^2} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} dE$$

donde E_C^{sup} es la máxima energía permitida en la banda de conducción. Si suponemos que $E_C - E_F \geq 3 \cdot kT$ podemos utilizar la aproximación de Boltzmann, por lo que:

$$n_0 = \int_{E_C}^{E_C^{sup}} \frac{4\pi \cdot m_n^*}{h^2} \cdot \exp\left(\frac{-(E - E_F)}{kT}\right) dE$$

Como $\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)$ decrece rápidamente se puede utilizar la aproximación $E_C^{sup} = \infty$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} n_0 &= \int_{E_C}^{\infty} \frac{4\pi \cdot m_n^*}{h^2} \cdot \exp\left(\frac{-(E - E_F)}{kT}\right) dE = \frac{4\pi \cdot m_n^*}{h^2} \cdot (-kT) \cdot \exp\left(\frac{-(E - E_F)}{kT}\right) \Big|_{E_C}^{\infty} \\ &= \frac{4\pi \cdot m_n^* \cdot kT}{h^2} \cdot \exp\left(\frac{-(E_C - E_F)}{kT}\right) \end{aligned}$$

De manera similar se determina que la cantidad de huecos es:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \int_{E_V^{inf}}^{E_V} g(E) \cdot (1 - f(E)) dE = \int_{E_C}^{E_C^{sup}} \frac{4\pi \cdot m_p^*}{h^2} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_F - E}{kT}\right)} dE \\
&\approx \int_{E_V^{inf}}^{E_V} \frac{4\pi \cdot m_p^*}{h^2} \cdot \exp\left(\frac{-(E_F - E)}{kT}\right) dE \\
&\approx \int_{-\infty}^{E_V} \frac{4\pi \cdot m_p^*}{h^2} \cdot \exp\left(\frac{-(E_F - E)}{kT}\right) dE = \frac{4\pi \cdot m_p^*}{h^2} \cdot (kT) \cdot \exp\left(\frac{-(E_F - E_V)}{kT}\right) \Big|_{-\infty}^{E_V} \\
&= \frac{4\pi \cdot m_p^* \cdot kT}{h^2} \cdot \exp\left(\frac{-(E_F - E_V)}{kT}\right)
\end{aligned}$$

El semiconductor será intrínseco cuando $n_0 = p_0$:

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi \cdot m_n^* \cdot kT}{h^2} \cdot \exp\left(\frac{-(E_C - E_F)}{kT}\right) &= \frac{4\pi \cdot m_p^* \cdot kT}{h^2} \cdot \exp\left(\frac{-(E_F - E_V)}{kT}\right) \\
\Rightarrow m_n^* \cdot \exp\left(\frac{-(E_C - E_F)}{kT}\right) &= m_p^* \cdot \exp\left(\frac{-(E_F - E_V)}{kT}\right) \\
\Rightarrow \exp\left(\frac{-(E_C - E_F - (E_F - E_V))}{kT}\right) &= \frac{m_p^*}{m_n^*} \\
\Rightarrow \exp\left(\frac{(2 \cdot E_F - (E_C + E_V))}{kT}\right) &= \frac{m_p^*}{m_n^*} \\
\Rightarrow \frac{2 \cdot E_F - (E_C + E_V)}{kT} &= \ln\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right) \\
\Rightarrow E_F &= \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{kT}{2} \cdot \ln\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right) \\
\Rightarrow E_F &= E_{midgap} + \frac{kT}{2} \cdot \ln\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right)
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.3.2 Calcule el número total de estados por unidad de volumen en el Silicio entre las energías E_C y $E_C + kT$ cuando la temperatura es $300^\circ K$

Solución:

El número de estados disponibles es:

$$\begin{aligned}
N &= \int_{E_C}^{E_C + kT} g_c(E) dE = \int_{E_C}^{E_C + kT} \frac{4\pi \cdot (2m_n^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \cdot \sqrt{E - E_C} dE \\
&= \frac{4\pi \cdot (2m_n^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (E - E_C)^{1,5} \Big|_{E_C}^{E_C + kT} \\
&= \frac{4\pi \cdot (2m_n^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (kT)^{1,5}
\end{aligned}$$

Como $N_C = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2} \right)^{3/2}$:

$$N = \frac{4}{3 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot N_C = \frac{4}{3 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot 2,8 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3} = 2,106 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}$$

■

Ejemplo 2.3.3 Para un cristal de silicio intrínseco a 300°K determine la probabilidad de ocupación de un estado energético de valor $E_C + kT$. Ahora se dopa el material de forma que el nivel de Fermi es prácticamente E_C ; calcule de nuevo la probabilidad de ocupación del mismo nivel energético.

Solución:

La probabilidad de ocupación de dicho estado se calcula a través de la función de Fermi-Dirac, y es

$$f_F(E_C + kT) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_C + kT - E_F}{kT}\right)}$$

Para semiconductores intrínsecos el nivel de Fermi es:

$$\begin{aligned} E_{F_i} &= E_{midgap} + \frac{1}{2} \cdot kT \ln\left(\frac{N_V}{N_C}\right) = E_{midgap} + \frac{1}{2} \cdot 0,02585\text{eV} \ln\left(\frac{1,04 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}}{2,8 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}}\right) \\ &= E_{midgap} - 0,0128\text{eV} \end{aligned}$$

Como $E_{midgap} = E_C - \frac{E_g}{2} = E_C - \frac{1,12\text{eV}}{2} = E_C - 0,56\text{eV}$:

$$\begin{aligned} E_C + kT - E_{F_i} &= E_C + 0,02585\text{eV} - E_{midgap} + 0,0128\text{eV} = 0,03865\text{eV} + (E_C - E_{midgap}) \\ &= 0,59865\text{eV} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_F(E_C + kT) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{0,59865\text{eV}}{0,02585}\right)} = 8,76 \cdot 10^{-11}$$

Si se hubiese supuesto que el nivel de Fermi intrínseco está justo en la mitad de la banda prohibida se hubiese obtenido que $E_C + kT - E_{F_i} = \frac{E_g}{2} + kT = 0,58585\text{eV}$ y por lo tanto $f_F(E_C + kT) = 1,43 \cdot 10^{-10}$

En el caso en el que $E_F = E_C$ se tiene que $E_C + kT - E_F = kT = 0,02585\text{eV}$, y por lo tanto:

$$f_F(E_C + kT) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{0,02585\text{eV}}{0,02585}\right)} = 0,269$$

■

2.4. Semiconductores en equilibrio y conducción en los sólidos

Ejemplo 2.4.1 Considere un cristal de silicio a temperatura ambiente (300°K) dopado con átomos de arsénico de manera que $N_d = 6 \cdot 10^{16} \cdot \text{cm}^{-3}$. Encuentre los valores en equilibrio de la concentración de electrones n_0 y la concentración de huecos p_0 , y determine el nivel de Fermi E_F con respecto al nivel de Fermi intrínseco E_{F_i} y con respecto al borde de la banda de conducción E_C .

Solución:

Como $N_d = 6 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3} \gg 1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3} = n_i$ podemos aproximar $n_0 \approx N_d = 6 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}$. Por lo tanto

$$p_0 = \frac{n_i^2}{n_0} = \frac{(1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3})^2}{6 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}} = 3750 \text{cm}^{-3}$$

Finalmente:

$$E_F - E_C = -kT \ln \left(\frac{N_C}{n_0} \right) = -0,02585 \text{eV} \cdot \ln \left(\frac{2,8 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}}{6 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}} \right) = -0,159 \text{eV}$$

$$E_F - E_{F_i} = kT \ln \left(\frac{n_0}{n_i} \right) = 0,02585 \text{eV} \cdot \ln \left(\frac{6 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}}{1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3}} \right) = 0,393 \text{eV}$$

■

Ejemplo 2.4.2 Encuentre la densidad de impurezas que deben agregarse a un cristal de Silicio intrínseco a fin de obtener:

- (a) Silicio tipo p con resistividad de $0,1 \Omega \cdot \text{m}$
 (b) Silicio tipo n con la misma resistividad que en el apartado (a).

Calcule, para cada caso, la densidad de portadores mayoritarios y minoritarios.

Solución:

- (a) Para silicio tipo p se tiene que $p_0 \gg n_0$. Por lo tanto $\sigma = q(\mu_n n_0 + \mu_p p_0) \approx q\mu_p p_0$. Luego:

$$p_0 = \frac{\sigma}{q\mu_p} = \frac{1}{q\mu_p \rho} = \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 480 \frac{\text{cm}^2}{\text{V} \cdot \text{s}} \cdot 0,1 \Omega \cdot \text{m}} = \frac{1}{7,689 \cdot 10^{-18} \text{cm}^{-2} \cdot \text{m}} = 1,3 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3}$$

Como $p_0 \approx N_a$ se obtiene que $N_a = 1,3 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3}$. Finalmente: $n_0 = \frac{n_i^2}{p_0} = \frac{(1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3})^2}{1,3 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3}} = 1,73 \cdot 10^5 \text{cm}^{-3}$

- (b) En este caso $n_0 \gg p_0 \Rightarrow \sigma = q(\mu_n n_0 + \mu_p p_0) \approx q\mu_n n_0$:

$$n_0 = \frac{\sigma}{q\mu_n} = \frac{1}{q\mu_n \rho} = \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 1350 \frac{\text{cm}^2}{\text{V} \cdot \text{s}} \cdot 0,1 \Omega \cdot \text{m}} = \frac{1}{2,163 \cdot 10^{-17} \text{cm}^{-2} \cdot \text{m}} = 4,62 \cdot 10^{14} \text{cm}^{-3}$$

$$p_0 = \frac{n_i^2}{n_0} = \frac{(1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3})^2}{4,62 \cdot 10^{14} \text{cm}^{-3}} = 4,87 \cdot 10^5 \text{cm}^{-3}$$

Finalmente, $N_d \approx n_0 = 4,62 \cdot 10^{14} \text{cm}^{-3}$.

■

Ejemplo 2.4.3 Una pastilla rectangular de silicio tipo n tiene 1cm de largo, 2cm de ancho (llamado en este problema eje AB) y $2 \cdot 10^{-2}$ cm de espesor. Se mide la resistencia en el eje AB y se obtiene que es $5,2k\Omega$. La pastilla se conecta a una fuente y se hace circular una corriente de 1mA a lo largo de ella, en la dirección de su espesor (que mide $2 \cdot 10^{-2}$ cm). A continuación se sumerge la pastilla en un campo magnético de magnitud 2Weber/m² y que es perpendicular al eje AB y a la dirección de la corriente. Aparece entonces una tensión en los extremos de la pastilla, sobre el eje $A-B$, de 0,7142V. Este experimento se realiza a una temperatura de 300°K.

- (a) Encuentre la concentración de impurezas donadoras que tiene la pastilla.
 (b) Estime la movilidad de los electrones en esta pastilla.
 (c) Determine la ubicación del nivel de Fermi con respecto al nivel de energía mínimo de la banda de conducción.

Solución:

- (a) El voltaje debido al efecto Hall es:

$$V_H = \frac{I \cdot B}{q \cdot n \cdot d} \Rightarrow n = \frac{I \cdot B}{q \cdot V_H \cdot d} = \frac{1\text{mA} \cdot 2 \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2}}{1,602 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 0,7142\text{V} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\text{cm}} = 8,74 \cdot 10^{17} \text{m}^{-2} \cdot \text{cm}^{-1}$$

$$= 8,74 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}$$

Como $n_0 = 8,74 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3} \gg 1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3} = n_i$ se tiene que $N_d \approx n_0 = 8,74 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}$

- (b) La resistencia a lo largo del eje AB es

$$R_{AB} = \frac{2\text{cm}}{1\text{cm} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\text{cm} \cdot \sigma}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2\text{cm}}{1\text{cm} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\text{cm} \cdot R_{AB}} = \frac{100\text{cm}^{-1}}{5200\Omega} = 1,923 \cdot 10^{-2} \text{cm}^{-1}\Omega^{-1}$$

Como el material es de tipo n se tiene que $\sigma \approx q \cdot \mu_n n$

$$\Rightarrow \mu_n = \frac{\sigma}{q \cdot n} = \frac{1,923 \cdot 10^{-2} \text{cm}^{-1}\Omega^{-1}}{1,602 \cdot 10^{-19}\text{C}^{-1} \cdot 8,74 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}} = 1373 \frac{\text{cm}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}$$

- (c) Se tiene que: $E_F - E_C = -0,02585\text{meV} \ln \left(\frac{2,8 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}}{8,74 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}} \right) = -0,328\text{eV}$

■

Ejemplo 2.4.4 Una muestra de Germanio se contamina uniformemente con átomos de aluminio, de forma que la concentración de impurezas es $5 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}$. Para el Germanio a 300°K la concentración intrínseca es de $2 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}$.

- (a) Calcule las concentraciones en equilibrio de huecos y electrones.
 (b) ¿A qué temperatura la concentración de minoritarios será el 1% de la concentración de mayoritarios?. Suponga que la concentración intrínseca crece exponencialmente con la temperatura a razón del $\frac{6\%}{\circ K}$.

Solución:

- (a) El aluminio tiene valencia 3, por lo que es un donador; es decir, $N_d = 5 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}$. Como $N_d \gg n_i$, $n_0 \approx N_d = 5 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}$. Luego:

$$p_0 = \frac{n_i^2}{n_0} = \frac{(2 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3})^2}{5 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}} = 8 \cdot 10^9 \text{cm}^{-3}$$

- (b) La concentración de minoritarios será el 1% de la concentración de mayoritarios cuando $p_0 = 0,01 \cdot n_0$. Multiplicando esa ecuación por n_0 se tiene:

$$n_i^2 = 0,01 \cdot n_0^2 \Rightarrow n_i = 0,1 \cdot n_0$$

Como todavía $n_0 \gg n_i$ se tiene que $n_0 \approx N_d = 5 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}$, por lo que $n_i = 5 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3}$.

Como se tiene que la concentración intrínseca crece exponencialmente con la temperatura a razón del $\frac{6\%}{^\circ K}$, y que a $300^\circ K$, $n_i = 2 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}$, se concluye que:

$$n_i(T) = 2 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3} \cdot (1,06)^{\frac{T-300^\circ K}{^\circ K}}$$

Por lo tanto, a la temperatura buscada T se tendrá que:

$$\begin{aligned} n_i(T) &= 2 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3} \cdot (1,06)^{\frac{T-300^\circ K}{^\circ K}} = 5 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3} \\ \Rightarrow (1,06)^{\frac{T-300^\circ K}{^\circ K}} &= 250 \\ \frac{T - 300^\circ K}{^\circ K} &= \log_{1,06}(250) = \frac{\ln(250)}{\ln(1,06)} = 94,75 \\ T &= 394,75^\circ K \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.4.5 Se determina experimentalmente la resistencia R de un bloque rectangular de un semiconductor desconocido, de ancho d , largo L y espesor w . A partir de este experimento se obtiene la gráfica de la figura 2.2 de $\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$ vs T^{-1} , donde R_0 es la resistencia del bloque a una temperatura de referencia T_0 . Determine el valor del ancho de la banda prohibida de energía del material (E_g). Considere que la temperatura es lo suficientemente alta como para considerar que el material está en la zona intrínseca. ¿Qué material es? Asuma que las movilidades son independientes de la temperatura.

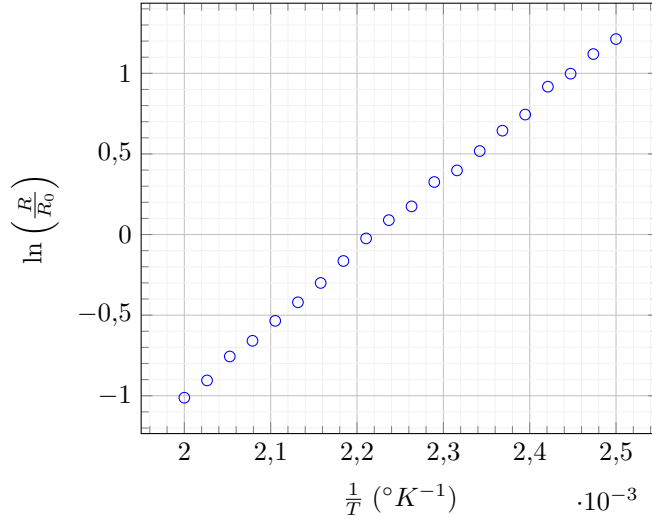


Figura 2.2: Figura del ejemplo 2.4.5.

Solución:

La resistencia del bloque es $R = \frac{L}{d \cdot w \cdot \sigma}$, donde $\sigma = q(\mu_n n + \mu_p p)$ es la conductividad del bloque semiconductor. Como se puede asumir que el semiconductor está en la zona intrínseca se tiene que $n = p = n_i$, por lo que $\sigma = q(\mu_n + \mu_p) \cdot n_i$. Por lo tanto, enfatizando la dependencia de la temperatura:

$$R = \frac{L}{d \cdot w \cdot q(\mu_n + \mu_p) \cdot n_i(T)}$$

Por lo tanto:

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \ln\left(\frac{\frac{L}{d \cdot w \cdot q(\mu_n + \mu_p) \cdot n_i(T)}}{\frac{L}{d \cdot w \cdot q(\mu_n + \mu_p) \cdot n_i(T_0)}}\right) = \ln\left(\frac{n_i(T_0)}{n_i(T)}\right) = \ln(n_i(T_0)) - \ln(n_i(T))$$

Donde se pudo simplificar el factor $(\mu_n + \mu_p)$ pues se asumió que las movilidades son independientes de la temperatura. Definiendo $x = \frac{1}{T}$:

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \ln(n_i(x_0)) - \ln(n_i(x))$$

Derivando la expresión anterior con respecto a x se llega a que:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{dx} &= -\frac{d \ln(n_i(x))}{dx} = -\left(-\frac{3}{2x} - \frac{E_g}{2k}\right) \\ \frac{d \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{dx} &= \frac{3}{2x} + \frac{E_g}{2k} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Si se asume que $\frac{E_g}{2k} \gg \frac{3}{2x}$ se tendría que $\frac{d \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{dx} \approx \frac{E_g}{2k}$, que es constante, y por lo tanto $\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$ sería una recta (de pendiente $\frac{E_g}{2k}$). La figura 2.2 parece ser, efectivamente, una recta

de pendiente:

$$\frac{1,2 - (-1)}{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1} - 2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} = 4400^\circ K$$

Igualando esta pendiente a $\frac{E_g}{2k}$ se obtiene:

$$E_g = 2 \cdot k \cdot 4400^\circ K = 0,76\text{eV}$$

Ahora hay que verificar que efectivamente $\frac{E_g}{2k} \gg \frac{3}{2x}$. Se tiene que $\frac{E_g}{2k} = 4400^\circ K$ y que $\frac{3}{2x}$ varía entre $\frac{1,5}{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} = 600^\circ K$ y $\frac{1,5}{2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} = 750^\circ K$. Luego, es falso que $\frac{E_g}{2k} \gg \frac{3}{2x}$ por lo que la temperatura no es lo suficientemente baja como para suponer que $\frac{d \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{dx} \approx \frac{E_g}{2k}$. Por lo tanto hay que utilizar la expresión completa (ecuación 2.4.1).

Tomando el valor promedio de esa ecuación en el intervalo $(2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}, 2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1})$:

$$\overline{\frac{d \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{dx}} = \frac{\overline{3}}{2x} + \frac{E_g}{2k} = \frac{E_g}{2k} + \frac{\overline{3}}{2x}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{dx}} &= \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1} - 2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} \cdot \int_{2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}}^{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} \frac{d \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{dx} dx \\ &= \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1} - 2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} \cdot \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) \Big|_{2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}}^{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} \\ &= \frac{1,2 - (-1)}{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1} - 2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} = 4400^\circ K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{3}}{2x} &= \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1} - 2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} \cdot \int_{2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}}^{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} \frac{3}{2x} dx \\ &= \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1} - 2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} \cdot \frac{3}{2} \ln(x) \Big|_{2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}}^{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} \\ &= \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1} - 2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}} \cdot \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2,5 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}}{2 \cdot 10^{-3}(\text{°K})^{-1}}\right) = 669,43^\circ K \end{aligned}$$

Por lo que, finalmente:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{dx}} &= \frac{E_g}{2k} + \frac{\overline{3}}{2x} \\ \Rightarrow 4400^\circ K &= \frac{E_g}{2k} + 669,43^\circ K \\ \Rightarrow \frac{E_g}{2k} &= 3730,57^\circ K \\ \Rightarrow E_g &= 2 \cdot k \cdot 3730,57^\circ K = 0,64\text{eV} \end{aligned}$$

Este valor es bastante cercano al de la brecha energética del Germanio (0,66eV). Teniendo en cuenta que los valores presentados en la figura 2.2 son experimentales, por lo que tienen un error asociado, se concluye que el semiconductor utilizado es Germanio.

Comentario: En un experimento real sería mejor determinar $\frac{d \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{dx}$ a partir de todas las mediciones, en lugar de hacerlo exclusivamente a partir de la primera y la última. ■

Ejemplo 2.4.6 *Un termistor fabricado con silicio intrínseco tiene una resistencia de 500Ω cuando la temperatura es $300^\circ K$.*

- (a) *¿Cuál es el coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura a $300^\circ K$ porcentualmente por grado Kelvin?, ¿cuál es el valor para $400^\circ K$?*
- (b) *¿Cuál es el valor de la resistencia del termistor a $325^\circ K$ y a $275^\circ K$.*

Asuma que μ_n y μ_p son independientes de la temperatura.

Solución:

Como se discutió en la solución del ejemplo anterior, si se asume que μ_n y μ_p son independientes de la temperatura se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_0} &= \frac{\frac{L}{d \cdot w \cdot q(\mu_n + \mu_p) \cdot n_i(T)}}{\frac{L}{d \cdot w \cdot q(\mu_n + \mu_p) \cdot n_i(T_0)}} = \frac{n_i(T_0)}{n_i(T)} = \frac{A_0 \cdot T_0^{3/2} \cdot e^{-E_g/2kT_0}}{A_0 \cdot T^{3/2} \cdot e^{-E_g/2kT}} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2} \cdot e^{(E_g/2kT - E_g/2kT_0)} \\ &= \left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{E_g}{2k} \cdot \left(\frac{T_0 - T}{T_0 \cdot T}\right)\right) \end{aligned}$$

En el caso de este problema, $T_0 = 300^\circ K$, $R_0 = 500\Omega$ y $E_g = 1,12\text{eV}$ por lo que $\frac{E_g}{kT} = \frac{1,12\text{eV}}{8,617 \cdot 10^{-5} \text{eV} \cdot ^\circ K^{-1}} = 6500^\circ K$. Por lo tanto:

$$R = 500\Omega \cdot \left(\frac{300^\circ K}{T}\right)^{3/2} \exp\left(6500^\circ K \cdot \left(\frac{300^\circ K - T}{300^\circ K \cdot T}\right)\right)$$

El coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura es $\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT}$. Existen dos maneras de calcular este coeficiente: calculando $\frac{dR}{dT}$ y dividiendo por R , o calculando $\frac{d \ln(R)}{dT}$. Si utilizamos la primera manera:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dR}{dT} &= 500\Omega \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{300^\circ K}{T}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{-300^\circ K}{T^2}\right) \cdot \exp\left(6500^\circ K \cdot \left(\frac{300^\circ K - T}{300^\circ K \cdot T}\right)\right) \\ &+ 500\Omega \cdot \left(\frac{300^\circ K}{T}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(6500^\circ K \cdot \left(\frac{300^\circ K - T}{300^\circ K \cdot T}\right)\right) \cdot 6500^\circ K \cdot \left(\frac{-300^\circ K \cdot T - (300^\circ K - T) \cdot 300^\circ K}{(300^\circ K \cdot T)^2}\right) \\ &= 500\Omega \cdot \left(\frac{300^\circ K}{T}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(6500^\circ K \cdot \left(\frac{300^\circ K - T}{300^\circ K \cdot T}\right)\right) \cdot \left(\frac{-900^\circ K}{2T^2} - \left(\frac{300^\circ K}{T}\right) \cdot 6500^\circ K \cdot \frac{1}{T^2}\right) \\ &= 500\Omega \cdot \left(\frac{300^\circ K}{T}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(6500^\circ K \cdot \left(\frac{300^\circ K - T}{300^\circ K \cdot T}\right)\right) \cdot \left(\frac{-450^\circ K \cdot T - 1,95 \cdot 10^6 (^\circ K)^2}{T^3}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el coeficiente de variación de la resistencia es:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{R} &= \frac{500\Omega \cdot \left(\frac{300^\circ K}{T}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(6500^\circ K \cdot \left(\frac{300^\circ K - T}{300^\circ K \cdot T}\right)\right) \cdot \left(\frac{-450^\circ K \cdot T - 1,95 \cdot 10^6 (\text{°K})^2}{T^3}\right)}{500\Omega \cdot \left(\frac{300^\circ K}{T}\right)^{3/2} \exp\left(6500^\circ K \cdot \left(\frac{300^\circ K - T}{300^\circ K \cdot T}\right)\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{-450^\circ K \cdot T - 1,95 \cdot 10^6 (\text{°K})^2}{T^3}\right)}{\left(\frac{300^\circ K}{T}\right)} \\ &= \left(\frac{-1,5 \cdot T - 6500^\circ K}{T^2}\right)\end{aligned}$$

Si calculamos el coeficiente de variación con la segunda manera se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{R} &= \frac{d \ln(R)}{dT} = \frac{d \ln\left(500\Omega \cdot \left(\frac{300^\circ K}{T}\right)^{3/2} \exp\left(6500^\circ K \cdot \left(\frac{300^\circ K - T}{300^\circ K \cdot T}\right)\right)\right)}{dT} \\ &= \frac{d\left(\ln(500\Omega) + \frac{3}{2} \cdot \ln\left(\frac{300^\circ K}{T}\right) + \left(6500^\circ K \cdot \left(\frac{300^\circ K - T}{300^\circ K \cdot T}\right)\right)\right)}{dT} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{300^\circ K} \cdot \left(\frac{-300^\circ K}{T^2}\right) + 6500^\circ K \cdot \frac{(-1) \cdot (300^\circ K \cdot T) - (300^\circ K - T) \cdot 300^\circ K}{(300^\circ K \cdot T)^2} \\ &= \frac{-3}{2T} - \frac{6500^\circ K}{T^2} = \frac{-3T - 13000^\circ K}{2T^2} = \left(\frac{-1,5 \cdot T - 6500^\circ K}{T^2}\right)\end{aligned}$$

Se ve que la segunda manera es más corta, por lo que es menos propensa a errores y es, en general, preferible a la primera. El mencionado coeficiente, a las temperaturas solicitadas, es:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT} &= \left(\frac{-1,5 \cdot 300^\circ K - 6500^\circ K}{(300^\circ K)^2}\right) = -0,0772(\text{°K})^{-1} = -7,72\%(\text{°K})^{-1} && \text{si } T = 300^\circ K \\ \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT} &= \left(\frac{-1,5 \cdot 400^\circ K - 6500^\circ K}{(400^\circ K)^2}\right) = -0,0444(\text{°K})^{-1} = -4,44\%(\text{°K})^{-1} && \text{si } T = 400^\circ K\end{aligned}$$

Los valores de la resistencia en las temperaturas solicitadas es:

$$\begin{aligned}R &= 500\Omega \cdot \left(\frac{300^\circ K}{325^\circ K}\right)^{3/2} \exp\left(6500^\circ K \cdot \left(\frac{300^\circ K - 325^\circ K}{300^\circ K \cdot 325^\circ K}\right)\right) = 83,75\Omega && \text{si } T = 325^\circ K \\ R &= 500\Omega \cdot \left(\frac{300^\circ K}{275^\circ K}\right)^{3/2} \exp\left(6500^\circ K \cdot \left(\frac{300^\circ K - 275^\circ K}{300^\circ K \cdot 275^\circ K}\right)\right) = 4084\Omega && \text{si } T = 275^\circ K\end{aligned}$$

Como comparación se calcularán los valores que se obtendrían si el coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura fuese constante (y fuese el valor que se obtiene a $300^\circ K$: $-0,0772(\text{°K})^{-1}$):

$$\begin{aligned}R &= 500\Omega \cdot (1 - 0,0772)^{\left(\frac{325^\circ K - 300^\circ K}{\text{°K}}\right)} = 67,09\Omega && \text{si } T = 325^\circ K \\ R &= 500\Omega \cdot (1 - 0,0772)^{\left(\frac{275^\circ K - 300^\circ K}{\text{°K}}\right)} = 3726\Omega && \text{si } T = 275^\circ K\end{aligned}$$

Los errores obtenidos con la aproximación anterior son del 24,8% y del 8,77% cuando $T = 325^\circ K$ y $T = 275^\circ K$, respectivamente. Aunque cuando $T = 325^\circ K$ el error obtenido es significativo, se resalta que en ambos casos se obtiene una buena idea del orden de magnitud de la resistencia. ■

Ejemplo 2.4.7 Una muestra de silicio intrínseco se dopa con donadores de forma tal que $N_d = N_0 \cdot e^{-ax}$, donde N_0 es la densidad volumétrica de donadores en $x = 0$.

- (a) Encuentre una expresión para el campo eléctrico interno, en equilibrio, para $N_d \gg n_i$.
- (b) Evalúe el campo eléctrico cuando $a = 1(\mu\text{m})^{-1}$ y $T = 300^\circ\text{K}$.
- (c) Dibuje la variación del diagrama de bandas en la muestra.

Solución:

- (a) La ecuación de continuidad para los electrones es:

$$D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu_n \left(\mathcal{E} \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) + g'_n - R'_n = \frac{\partial(\delta n)}{\partial t}$$

Como en toda la extensión del semiconductor $N_d \gg n_i$, el material es de tipo n y $n_0 = N_d$. Como además se considera que el semiconductor está en equilibrio se tiene que $\delta n = \delta p = 0$, por lo que $n = n_0 = N_d = N_0 \cdot e^{-ax}$ y $g'_n = R'_n$. La ecuación de continuidad se reduce entonces a:

$$\begin{aligned} D_n \frac{\partial^2 N_0 \cdot e^{-ax}}{\partial x^2} + \mu_n \left(\mathcal{E} \frac{\partial N_0 \cdot e^{-ax}}{\partial x} + N_0 \cdot e^{-ax} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial 0}{\partial t} \\ D_n \cdot a^2 N_0 e^{-ax} + \mu_n \left(\mathcal{E} \cdot (-aN_0 e^{-ax}) + N_0 \cdot e^{-ax} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) &= 0 \\ D_n \cdot a^2 N_0 - \mu_n \cdot \mathcal{E} \cdot aN_0 + \mu_n N_0 \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} &= 0 \\ \mathcal{E} \cdot a - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} &= \frac{D_n a^2}{\mu_n} \end{aligned}$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial lineal de primer orden cuya solución general viene dada por:

$$\mathcal{E} = \frac{D_n}{\mu_n} a + C_1 e^{ax}$$

Donde C_1 es una constante. Como, por la relación de Einstein, $\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{kT}{q}$:

$$\mathcal{E} = \frac{kT}{q} a + C e^{ax} \quad (2.4.2)$$

La ecuación de continuidad para los huecos es:

$$D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu_p \left(\mathcal{E} \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) + g'_p - R'_p = \frac{\partial(\delta p)}{\partial t}$$

Como el semiconductor está en equilibrio:

$$p = p_0 = \frac{n_i^2}{n_0} = \frac{n_i^2}{N_0 \cdot e^{-ax}} = \left(\frac{n_i^2}{N_0} \right) \cdot e^{ax} = P_0 \cdot e^{ax}$$

Donde $P_0 = \frac{n_i^2}{N_0}$ es la concentración de huecos en equilibrio en $x = 0$. Luego, la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\begin{aligned} D_p \frac{\partial^2 P_0 \cdot e^{ax}}{\partial x^2} - \mu_p \left(\mathcal{E} \frac{\partial P_0 \cdot e^{ax}}{\partial x} + P_0 \cdot e^{ax} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial 0}{\partial t} \\ D_p \cdot a^2 P_0 \cdot e^{ax} - \mu_p \mathcal{E} \cdot a P_0 \cdot e^{ax} - \mu_p \cdot P_0 \cdot e^{ax} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} &= 0 \\ \mathcal{E} \cdot a + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} &= \frac{D_p a^2}{\mu_p} \end{aligned}$$

Recordando la relación de Einstein se obtiene que las soluciones de la ecuación anterior son de la forma:

$$\mathcal{E} = \frac{kT}{q} a + C_2 e^{-ax} \quad (2.4.3)$$

Donde C_2 es una constante.

Como ambas ecuaciones de continuidad deben satisfacerse, resulta que \mathcal{E} debe satisfacer tanto la ecuación 2.4.2 como la ecuación 2.4.3, por lo que $C_1 = C_2 = 0$ (basta con resolver el sistema de ecuaciones que resulta al evaluar x en dos puntos distintos del semiconductor) y:

$$\mathcal{E} = \frac{kT}{q} a$$

(b) En este caso:

$$\mathcal{E} = \frac{kT}{q} a = \frac{8,617 \cdot 10^{-5} \text{eV} (\text{°K})^{-1} \cdot 300 \text{°K}}{q} \cdot 1 \cdot 10^4 (\text{cm})^{-1} = 258,5 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

Donde se utilizó el hecho de que $\frac{1\text{eV}}{q} = 1\text{V}$

(c) Como $\mathcal{E} = \frac{kT}{q} a$, y como $\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\mathcal{E}$, resulta que el potencial eléctrico es $V(x) = -\frac{kT}{q} a \cdot x + C_3$. Si se utiliza como referencia el potencial en $x = 0$ (es decir, si se toma $V(0) = 0\text{V}$) resulta que $V(x) = -\frac{kT}{q} a \cdot x$. La energía potencial de un electrón correspondiente al potencial eléctrico es, entonces:

$$E_{\text{potencial electrico}} = -qV(x) = -q \cdot \left(-\frac{kT}{q} a \cdot x \right) = kT a \cdot x$$

Se concluye entonces que la energía de un electrón en el semiconductor será de la forma

$$E = E_0 + kT a \cdot x$$

Por lo tanto, el efecto del potencial eléctrico es hacer que los niveles de energía permitidos, incluyendo las energías E_C y E_V , varíen como una función lineal de la posición. Esta situación se ilustra en la figura 2.3.

■

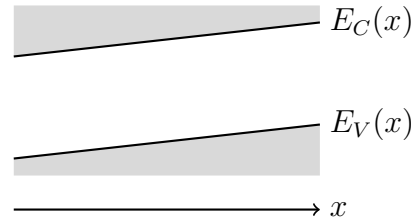


Figura 2.3: Variación de los niveles de energía permitidos en presencia de un campo eléctrico constante

2.5. Variación con la temperatura de los parámetros de los semiconductores

En este curso se utilizarán, prácticamente siempre, las siguientes dos suposiciones:

Suposición 2.5.1 *Los semiconductores a estudiar son no degenerados.*

Esta suposición dice que que $E_C - E_F \geq 3kT$ y que $E_F - E_V \geq 3kT$, y es necesaria para utilizar la aproximación de Boltzmann:

$$f_F(E_C) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_C - E_F}{kT}\right)} \approx e^{-\left(\frac{E_C - E_F}{kT}\right)}$$

$$1 - f_F(E_V) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_F - E_V}{kT}\right)} \approx e^{-\left(\frac{E_F - E_V}{kT}\right)}$$

En efecto, si en la primera aproximación se toma $E_C - E_F = 3kT$ se tendrá que $f_F(E_C) = \frac{1}{1+e^3} \approx 0,0474$ y que $e^{-3} = 0,0498$, por lo que el error de la aproximación es mayor al 5% y comienza a ser significativo.

De la aproximación de Boltzmann se deducen, entre otras, las siguientes expresiones:

$$n_0 = N_C \exp\left(-\frac{(E_C - E_F)}{kT}\right)$$

$$p_0 = N_V \exp\left(-\frac{(E_F - E_V)}{kT}\right)$$

$$n_i^2 = n_0 p_0$$

Por lo tanto, la validez de las mismas depende de la suposición 2.5.1.

Suposición 2.5.2 *En el caso de que existan impurezas donadoras o aceptoras en el semiconductor, hay ionización completa.*

Esta suposición dice que todos los átomos donadores y aceptores están ionizados; es decir, que todos los donadores donaron un electrón, y todos los aceptores aceptaron un electrón (o donaron un hueco). Esta suposición es fundamental para la aproximación $n_0 \approx N_d - N_a$ en materiales tipo n, y para la aproximación $p_0 \approx N_a - N_d$ en materiales tipo p. En realidad, para temperaturas bajas, esto no es así.

A continuación se estudiará, brevemente, como varían las densidades de portadores (electrones y huecos) y el nivel de Fermi en un semiconductor a medida que varía la temperatura. Esto se hará para entender las limitaciones de las suposiciones 2.5.1 y 2.5.2. En el análisis presentado a continuación se desprecia la variación de E_g con la temperatura.

La existencia de donadores y aceptores implica que existirán dos niveles de energía permitidos, E_d y E_a , dentro de la banda prohibida de energía. En la figura 2.4 se muestra esta situación.

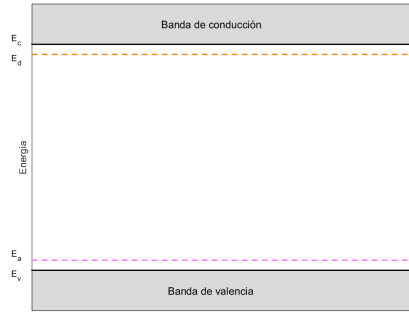


Figura 2.4: Niveles de energía permitidos que aparecen dentro de la banda prohibida de energía como consecuencia de la existencia de donadores (E_d) y aceptores (E_a).

El nivel E_d es el que ocupan los electrones, de los átomos donadores, que son fácilmente excitados hasta la banda de conducción. De igual manera, E_a es el nivel que ocupan los electrones que fueron fácilmente excitados desde la banda de valencia y que dejaron, en su lugar huecos. Otra manera de pensar en E_a es como en el nivel de energía ocupado por los huecos que son fácilmente excitados hasta la banda de valencia.

Así como la distribución de Fermi-Dirac describe la probabilidad de que un electrón esté en el nivel de energía E , es posible calcular la probabilidad de que un electrón esté en los niveles de energía E_a y E_d , llamadas $f_{\text{donador}}(E_d)$ y $f_{\text{aceptor}}(E_a)$, respectivamente. Estas probabilidades son:

$$f_{\text{donador}}(E_d) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{E_d - E_F}{kT}\right)}$$

$$f_{\text{aceptor}}(E_a) = \frac{1}{1 + 4 \cdot \exp\left(\frac{E_a - E_F}{kT}\right)}$$

Estas probabilidades se parecen a las que se obtendrían al sustituir E_d y E_a en la distribución de Fermi-Dirac. La única diferencia es la aparición de los factores $\frac{1}{2}$ y 4 en los denominadores. Una explicación de por qué aparecen estos factores puede encontrarse en la sección 2.5 de Van Zeghbroeck (2011).

Como un donador estará ionizado si pierde un electrón, y un aceptor estará ionizado si gana un electrón, se tiene que:

$$(\text{Probabilidad de ionización de un donador}) = 1 - f_{\text{donador}}(E_d) = \frac{1}{1 + 2 \cdot \exp\left(\frac{E_d - E_F}{kT}\right)}$$

$$(\text{Probabilidad de ionización de un aceptor}) = f_{\text{aceptor}}(E_a) = \frac{1}{1 + 4 \cdot \exp\left(\frac{E_a - E_F}{kT}\right)}$$

Llamando N_d^+ y N_a^- a la cantidad de átomos donadores y átomos aceptores ionizados, respectivamente, se concluye que:

$$N_d^+ = \frac{N_d}{1 + 2 \cdot \exp\left(\frac{E_d - E_F}{kT}\right)} \tag{2.5.1}$$

$$N_a^- = \frac{N_a}{1 + 4 \cdot \exp\left(\frac{E_a - E_F}{kT}\right)} \tag{2.5.2}$$

Como el semiconductor no debe tener carga almacenada se debe cumplir la ecuación de neutralidad de carga:

$$n_0 + N_a^- = p_0 + N_d^+ \tag{2.5.3}$$

Sin importar si la suposición 2.5.1 se cumple o no, se tiene que n_0 y p_0 dependen exclusivamente del nivel de Fermi una vez que las densidades de impurezas, el ancho de la banda de energía prohibida del material semiconductor y la temperatura son conocidas (véase, por ejemplo, la sección 4.3.3 de Neamen (2012)). Las ecuaciones 2.5.1 y 2.5.2 muestran que N_a^- y N_d^+ dependen también exclusivamente del nivel de Fermi E_F si E_g , N_a , N_d , E_a , E_d y T son conocidos.

Por lo tanto, a partir de la ecuación 2.5.3 puede obtenerse el valor de la energía de Fermi E_F , una vez conocidos E_g , N_a , N_d , E_a , E_d y T . En la figura 2.5 se muestra cómo varía el nivel de Fermi con la temperatura, para diferentes densidades de donadores y aceptores. Se resalta en cian las regiones en las cuales no se cumple la suposición 2.5.1. Se ve que para las densidades de donadores o aceptores menores o iguales a 10^{18}cm^{-3} la suposición 2.5.1 es correcta. Cabe destacar que la figura 2.5 fue obtenida sin asumir la suposición 2.5.1 como verdadera.

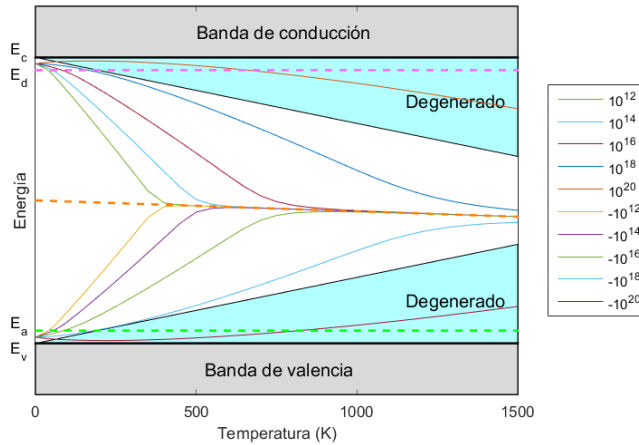
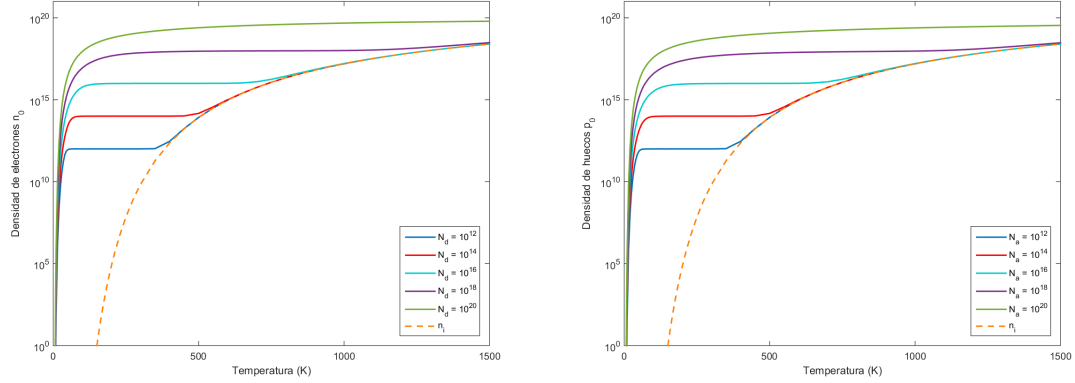


Figura 2.5: Niveles de Fermi para varias densidades de donadores y aceptores. En la leyenda las densidades positivas corresponden a N_d (y en ese caso $N_a = 0$), y las densidades negativas corresponden a N_a (y en ese caso $N_d = 0$). En cian se resaltan las regiones en donde el semiconductor es degenerado. La línea punteada naranja corresponde al nivel intrínseco.

En la figura 2.6 se ve como varía la densidad de portadores con la temperatura. Se observa que para temperaturas bajas no hay ionización completa, que para un rango intermedio de temperaturas la concentración permanece prácticamente constante (mientras $N_d^+ \approx N_d \gg n_i$ o $N_a^- \approx N_a \gg n_i$, de acuerdo al tipo

de material), y que para altas temperaturas el semiconductor se comporta como si fuese intrínseco (cuando $N_d \ll n_i$ o $N_a \ll n_i$). Se observa también que mientras más grande sea la densidad de donadores o aceptores, mayor será el rango de temperaturas para el cual la densidad de portadores permanece constante.



(a) Concentración de electrones n_0 en función de la temperatura para distintos valores de N_d . En todos los casos $N_a = 0$
 (b) Concentración de huecos p_0 en función de la temperatura para distintos valores de N_a . En todos los casos $N_d = 0$

Figura 2.6: Variación de la concentración de portadores con la temperatura.

En la mayoría de los casos considerados se tendrá que las densidades de donadores y aceptores serán menores que 10^{18}cm^{-3} . Se asumirá a partir de ahora que la suposición 2.5.1 es verdadera. En ese caso se cumple que:

$$n_0 = N_C \exp\left(-\frac{(E_C - E_F)}{kT}\right) \quad (2.5.4)$$

$$p_0 = N_V \exp\left(-\frac{(E_F - E_V)}{kT}\right) \quad (2.5.5)$$

Es importante recordar que N_C y N_V dependen también de la temperatura.

Como se ve en la figura 2.5, para materiales tipo n y temperaturas relativamente bajas el nivel de Fermi estará cerca de la banda de conducción. En ese caso $E_F - E_a \gg kT$ y por lo tanto, de acuerdo a la ecuación 2.5.2, se puede considerar que $N_a^- = N_a$. Similarmente, se puede suponer que $p_0 \ll N_d^+$ (pues $n_0 \approx N_d^+$, $p_0 \approx \frac{n_i^2}{n_0}$ y, como se ve en la figura 2.6, $n_0 \gg n_i$). Con estas suposiciones la ecuación 2.5.3 queda como:

$$n_0 + N_a = N_d^+$$

$$n_0 + N_a = \frac{N_d}{1 + 2 \cdot \exp\left(\frac{E_a - E_F}{kT}\right)}$$

Definiendo $N^* = \frac{N_C}{2} \cdot \exp\left(\frac{E_d - E_C}{kT}\right)$, y tomando en cuenta la ecuación 2.5.4, se tiene que:

$$n_0 + N_a = \frac{N_d}{1 + \frac{n_0}{N^*}}$$

Y resolviendo la ecuación cuadrática anterior se tiene que:

$$n_0 = -\frac{(N^* + N_a)}{2} + \sqrt{\frac{(N^* + N_a)^2}{4} + N^* \cdot (N_d - N_a)} \quad (2.5.6)$$

Similarmente, para semiconductores tipo p se puede llegar a la aproximación:

$$p_0 = -\frac{(P^* + N_d)}{2} + \sqrt{\frac{(P^* + N_d)^2}{4} + P^* \cdot (N_a - N_d)} \quad P^* = \frac{N_V}{4} \cdot \exp\left(\frac{E_V - E_a}{kT}\right)$$

En la figura 2.7 se muestran la concentración real de electrones cuando $N_d = 10^{16} \cdot \text{cm}^{-3}$ y $N_a = 0$ junto a la aproximación que se obtiene utilizando la ecuación 2.5.6 y a la concentración intrínseca n_i . Se ve que la aproximación es muy buena cuando $N_d \gg n_i$, y en especial para temperaturas bajas.

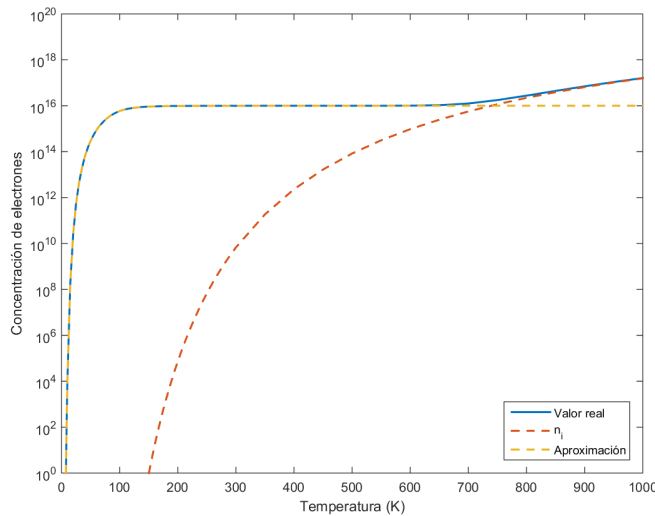


Figura 2.7: Niveles de Fermi para varias densidades de donadores y aceptores. En la leyenda las densidades positivas corresponden a N_d (y en ese caso $N_a = 0$), y las densidades negativas corresponden a N_a (y en ese caso $N_d = 0$). En cian se resaltan las regiones en donde el semiconductor es degenerado. La línea punteada naranja corresponde al nivel intrínseco.

Ejemplo 2.5.1 Se tiene una barra de Si con una concentración de impurezas donantes de $N_d = 5 \cdot 10^{17} \text{cm}^{-3}$. El nivel de energía de la impureza con respecto a la banda de conducción es $E_C - E_d = 0,04 \text{eV}$. Calcule la posición del nivel de Fermi y la concentración de electrones y huecos a temperatura ambiente (300°K) y a (70°K).

Solución:

El material es de tipo n, por lo que, a 300°K (teniendo en cuenta que $kT = 25,85 \text{meV}$):

$$N^* = \frac{2,8 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}}{2} \cdot \exp\left(\frac{-0,04 \text{eV}}{0,02585 \text{eV}}\right) = 2,979 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$$

$$n_0 = -\frac{(2,979 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3} + 0)}{2} + \sqrt{\frac{(2,979 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3} + 0)^2}{4} + 2,979 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3} \cdot (5 \cdot 10^{17} \text{cm}^{-3} - 0)}$$

$$= 4,36 \cdot 10^{17} \text{cm}^{-3}$$

$$p_0 = \frac{n_i^2}{n_0} = \frac{(1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3})^2}{4,36 \cdot 10^{17} \text{cm}^{-3}} = 516,06 \text{cm}^{-3}$$

Finalmente, el nivel de Fermi se obtiene como:

$$E_F = E_C - kT \cdot \ln\left(\frac{N_C}{n_0}\right) = E_C - 0,02585 \text{eV} \cdot \ln\left(\frac{2,8 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}}{4,36 \cdot 10^{17} \text{cm}^{-3}}\right) = E_C - 0,108 \text{eV}$$

En cambio, a 70°K se tiene que $kT = 6,03 \text{meV}$, por lo que:

$$N_C(70^\circ \text{K}) = 2,8 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3} \cdot \left(\frac{70}{300}\right)^{1,5} = 3,16 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$$

$$N_V(70^\circ \text{K}) = 1,04 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3} \cdot \left(\frac{70}{300}\right)^{1,5} = 1,17 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$$

$$N^* = \frac{3,16 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}}{2} \cdot \exp\left(\frac{-0,04 \text{eV}}{0,00603 \text{eV}}\right) = 2,08 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3}$$

$$n_0 = -\frac{(2,08 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3} + 0)}{2} + \sqrt{\frac{(2,08 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3} + 0)^2}{4} + 2,08 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3} \cdot (5 \cdot 10^{17} \text{cm}^{-3} - 0)}$$

$$= 3,12 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}$$

$$E_F = E_C - kT \cdot \ln\left(\frac{N_C}{n_0}\right) = E_C - 0,00603 \text{eV} \cdot \ln\left(\frac{3,16 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}}{3,12 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}}\right) = E_C - 0,028 \text{eV}$$

$$E_F - E_V = (E_C - E_V) - (E_C - E_F) = E_g - (E_C - E_F) = 1,12 \text{eV} - 0,028 \text{eV} = 1,092 \text{eV}$$

$$p_0 = 1,17 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3} \cdot \exp\left(-\frac{(1,092 \text{eV})}{0,00603 \text{eV}}\right) = 2,63 \cdot 10^{-61} \text{cm}^{-3}$$

Si utilizásemos las aproximaciones de este curso se tendría que, a 300°K :

Como $N_d = 5 \cdot 10^{17} \text{cm}^{-3} \gg 1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3} = n_i$ se tiene que $n_0 = N_d = 5 \cdot 10^{17} \text{cm}^{-3}$ y que $p_0 = \frac{n_i^2}{n_0} = 450 \text{cm}^{-3}$. La posición del nivel de Fermi se calcula de cualquiera de las siguientes tres maneras:

$$E_F = E_C - kT \cdot \ln\left(\frac{N_C}{n_0}\right) = E_C - 0,02585 \cdot \ln\left(\frac{2,8 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}}{5 \cdot 10^{17} \text{cm}^{-3}}\right) = E_C - 0,104 \text{eV}$$

$$E_F = E_V + kT \cdot \ln\left(\frac{N_V}{p_0}\right) = E_V + 0,02585 \cdot \ln\left(\frac{1,04 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}}{450 \text{cm}^{-3}}\right) = E_V + 0,974 \text{eV}$$

$$E_F = E_{F_i} + kT \cdot \ln\left(\frac{n_0}{n_i}\right) = E_{F_i} + 0,02585 \cdot \ln\left(\frac{5 \cdot 10^{17} \text{cm}^{-3}}{1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3}}\right) = E_{F_i} + 0,448 \text{eV}$$

Si se decide calcular el nivel de Fermi con respecto al nivel intrínseco también sería necesario calcular el nivel intrínseco con respecto a E_{midgap} :

$$E_{F_i} = E_{midgap} + \frac{3}{4} \cdot kT \cdot \ln\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right) = E_{midgap} + \frac{1}{2} \cdot kT \cdot \ln\left(\frac{N_V}{N_C}\right) = E_{midgap} - 0,0128 \text{eV}$$

Por lo tanto:

$$E_F = E_{midgap} - 0,0128 \text{eV} + 0,448 \text{eV} = E_{midgap} + 0,435 \text{eV}$$

Sin embargo, otra aproximación que comúnmente se hará es que, a 300°K , $E_{F_i} \approx E_{midgap}$.

El resultado obtenido para esta temperatura es muy parecido al obtenido con el análisis anterior. Sin embargo, estas aproximaciones no nos hubiesen permitido obtener las concentraciones y el nivel de Fermi a 70°K .

■

2.6. Semiconductores fuera de equilibrio

Ejemplo 2.6.1 *Se tiene una barra de Silicio de 2cm de largo, dopada con una concentración de impurezas donadoras $N_d = 10^{16} \text{cm}^{-3}$, y que tiene una sección transversal de $0,05 \text{cm}^2$. Se sabe que el tiempo de vida medio de los huecos es $\tau_p = 10^{-4} \text{s}$.*

- (a) ¿Cuál será la corriente si se aplican 10V sobre la muestra, en la dirección longitudinal.
- (b) Ahora también se ilumina la muestra de forma que se generan pares electrón-hueco a una tasa de $10^{19} \text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$. ¿Cuál es la nueva corriente?. Asuma que la movilidad no cambia con la concentración del dopaje.

Solución:

- (a) Como $N_d = 10^{16} \text{cm}^{-3} \gg 1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3} = n_i$ se tiene que $n_0 = N_d = 10^{16} \text{cm}^{-3}$ y $p_0 = \frac{n_i^2}{n_0} = \frac{(1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3})^2}{10^{16} \text{cm}^{-3}} = 22500 \text{cm}^{-3}$. La conductividad del material será $\sigma = q(mu_n n + mu_p p) \approx qmu_n n_0 = 2,16 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$. Por lo tanto, la resistencia del mismo será $R = \frac{2 \text{cm}}{0,05 \text{cm}^2 \cdot 2,16 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}} = 18,52 \Omega$. Y por lo tanto la corriente que pasa por el semiconductor será:

$$I = \frac{10 \text{V}}{18,52 \Omega} = 0,54 \text{A}$$

El análisis anterior supone, tácitamente, que $\delta n = \delta p = 0$. Esta suposición es correcta, como se demuestra a continuación de manera ilustrativa:

El campo eléctrico en la muestra será $\frac{10 \text{V}}{2 \text{cm}} = 5 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$. La ecuación de transporte ambipolar en materiales tipo n es:

$$D_p \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} - \mu_p \mathcal{E} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} + g' - \frac{\delta p}{\tau_p} = \frac{\partial(\delta p)}{\partial t}$$

Como se quiere la corriente en equilibrio se tendrá que $\frac{\partial(\delta p)}{\partial t} = 0$. Como en este caso no hay generación de pares electrón hueco, $g' = 0$. Por lo tanto:

$$D_p \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} - \mu_p \mathcal{E} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} - \frac{\delta p}{\tau_p} = 0$$

Utilizando los valores típicos del Silicio y el campo eléctrico calculado anteriormente:

$$\begin{aligned} 12,4 \text{cm}^2 \text{s}^{-1} \cdot \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} - 480 \text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} \cdot 5 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} - \frac{\delta p}{10^{-4} \text{s}} &= 0 \\ 12,4 \text{cm}^2 \cdot \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} - 2400 \text{cm} \cdot \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} - 10^4 \text{s}^{-1} \cdot \delta p &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, existen constantes C_1 y C_2 tales que:

$$\delta p = \delta n = C_1 \cdot e^{x/50,6 \mu\text{m}} + C_2 \cdot e^{-x/2451 \mu\text{m}} \quad (2.6.1)$$

La densidad de corriente será

$$\begin{aligned} J(x) &= q\mu_n n \mathcal{E} + q\mu_p p \mathcal{E} + qD_n \frac{dn(x)}{dx} - qD_p \frac{dp(x)}{dx} \\ &= (q\mu_n n + q\mu_p p) \mathcal{E} + qD_n \frac{d(n_0 + \delta n)}{dx} - qD_p \frac{d(p_0 + \delta p)}{dx} \\ &= (q\mu_n n_0 + q\mu_n \delta n + q\mu_p p_0 + q\mu_p \delta p) \mathcal{E} + (qD_n - qD_p) \frac{d(\delta p)}{dx} \\ &= (q\mu_n n_0 + q\mu_p p_0) \mathcal{E} + q(\mu_n + \mu_p) \mathcal{E} \cdot \delta p + (qD_n - qD_p) \frac{d(\delta p)}{dx} \\ &= 10,8135 \text{A cm}^{-2} + 1,466 \cdot 10^{-15} \text{A cm} \cdot \delta p + 3,6 \cdot 10^{-18} \text{A cm}^2 \cdot \frac{d(\delta p)}{dx} \end{aligned}$$

Como la corriente a través del semiconductor debe ser independiente de la posición, se tiene que existe una constante C_3 tal que:

$$1,466 \cdot 10^{-15} \text{A cm} \cdot \delta p + 3,6 \cdot 10^{-18} \text{A cm}^2 \cdot \frac{d(\delta p)}{dx} = C_3$$

Esto quiere decir que existe una constante C_4 tal que:

$$\delta p = C_4 \cdot e^{-x/24,56 \mu\text{m}} + C_3 \cdot 6,82 \cdot 10^{14} \text{A}^{-1} \text{cm}^{-1} \quad (2.6.2)$$

Las ecuaciones 2.6.1 y 2.6.2 deben satisfacerse simultáneamente. Se deja como ejercicio al lector demostrar que $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, por lo que $\delta p = \delta n = 0$, como se quería demostrar. Se concluye que la presencia de un campo eléctrico por sí sólo no afecta significativamente las concentraciones de portadores.

- (b) Este apartado será resuelto de dos maneras diferentes. La primera de ellas es formal, y la segunda más intuitiva.

Solución formal:

La ecuación de transporte ambipolar para materiales de tipo n es:

$$D_p \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} - \mu_p \mathcal{E} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} + g' - \frac{\delta p}{\tau_p} = \frac{\partial(\delta p)}{\partial t}$$

Como se quiere la corriente en equilibrio se tendrá que $\frac{\partial(\delta p)}{\partial t} = 0$. Se tiene que $g' = 10^{19} \text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$. Por lo tanto:

$$D_p \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} - \mu_p \mathcal{E} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} + 10^{19} \text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} - \frac{\delta p}{\tau_p} = 0$$

Utilizando los valores típicos del Silicio y el campo eléctrico calculado en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} 12,4 \text{cm}^2 \text{s}^{-1} \cdot \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} - 480 \text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} \cdot 5 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} + 10^{19} \text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} - \frac{\delta p}{10^{-4} \text{s}} &= 0 \\ 12,4 \text{cm}^2 \cdot \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} - 2400 \text{cm} \cdot \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} - 10^4 \text{s}^{-1} \cdot \delta p + 10^{19} \text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, existen constantes C_1 y C_2 tales que:

$$\delta p = \delta n = 1 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3} + C_1 \cdot e^{x/50,6 \mu\text{m}} + C_2 \cdot e^{-x/2451 \mu\text{m}} \quad (2.6.3)$$

La densidad de corriente será, como en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} J(x) &= (q\mu_n n_0 + q\mu_p p_0) \mathcal{E} + q(\mu_n + \mu_p) \mathcal{E} \cdot \delta p + (qD_n - qD_p) \frac{d(\delta p)}{dx} \\ &= 10,8135 \text{A cm}^{-2} + 1,466 \cdot 10^{-15} \text{A cm} \cdot \delta p + 3,6 \cdot 10^{-18} \text{A cm}^2 \cdot \frac{d(\delta p)}{dx} \end{aligned}$$

Definiendo

$$\Delta = C_1 \cdot e^{x/50,6 \mu\text{m}} + C_2 \cdot e^{-x/2451 \mu\text{m}}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \delta p &= 1 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3} + \Delta \\ \Rightarrow J(x) &= 10,8135 \text{A cm}^{-2} + 1,466 \cdot 10^{-15} \text{A cm} \cdot (1 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3} + \Delta) + 3,6 \cdot 10^{-18} \text{A cm}^2 \cdot \frac{d(1 \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3} + \Delta)}{dx} \\ &= 12,28 \text{A cm}^{-2} + 1,466 \cdot 10^{-15} \text{A cm} \cdot \Delta + 3,6 \cdot 10^{-18} \text{A cm}^2 \cdot \frac{d\Delta}{dx} \end{aligned}$$

De manera prácticamente igual a como se hizo en el apartado anterior se deduce que, para que $J(x)$ sea independiente de x debe tenerse que $\Delta = 0$. Por lo tanto:

$$I = 0,05 \text{cm}^2 \cdot 12,28 \text{A cm}^{-2} = 0,614 \text{A}$$

Solución intuitiva:

Si no existiese ningún campo eléctrico se tendría que

$$\frac{\partial(\delta p)}{\partial t} = g' - \frac{\delta p}{\tau_p}$$

Por lo que, considerando que $\delta p(t=0) = 0$:

$$\delta p = 10^{15} \text{cm}^{-3} \cdot (1 - e^{-t/100 \mu\text{s}})$$

La figura 2.8 muestra como se comportaría δp en este caso. Se ve que crecería hasta estabilizarse en 10^{15}cm^{-3} .

Como se vió en el apartado anterior la presencia de un campo eléctrico, por si sola, no afectará las concentraciones de portadores. Luego la única corriente que existirá será la de arrastre ("drift"). La conductividad del material será $\sigma = q(\mu_n(n_0 + \delta p) + \mu_p(p_0 + \delta p)) = 2,45 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$. Por lo tanto, la resistencia del mismo será $R = \frac{2 \text{cm}}{0,05 \text{cm}^2 \cdot 2,45 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}} = 16,33 \Omega$. Y por lo tanto la corriente que pasa por el semiconductor será:

$$I = \frac{10 \text{V}}{16,33 \Omega} = 0,612 \text{A}$$

■

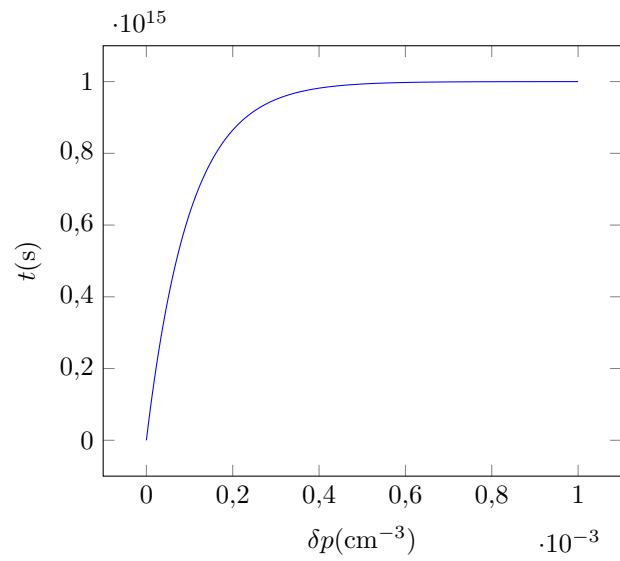


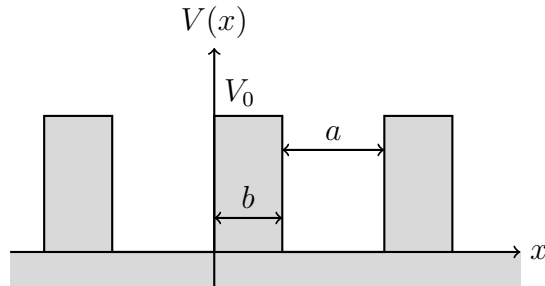
Figura 2.8: Variación de δp con el tiempo cuando no hay ningún campo eléctrico aplicado.

En la sección 6.3.3 de Neamen (2012) hay varios ejemplos resueltos en los que se estudia el comportamiento de los portadores en exceso en diferentes situaciones.

2.7. Fórmulas útiles

2.7.1. Teoría de bandas de energía de los sólidos

Modelo de Kronig-Penney



Si la energía del electrón es $E < V_0$:

$$\frac{\gamma^2 - \alpha^2}{2\alpha\gamma} \text{sen}(\alpha a) \text{senh}(\gamma b) + \cos(\alpha a) \cosh(\gamma b) = \cos(k(a + b))$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Si se hace $V_0 \rightarrow \infty$ y $b \rightarrow 0$ de manera que $bV_0 = \text{cte}$:

$$P' \cdot \frac{\text{sen}(\alpha a)}{\alpha a} + \cos(\alpha a) = \cos(ka)$$

$$P' = \frac{mV_0 b a}{\hbar^2}$$

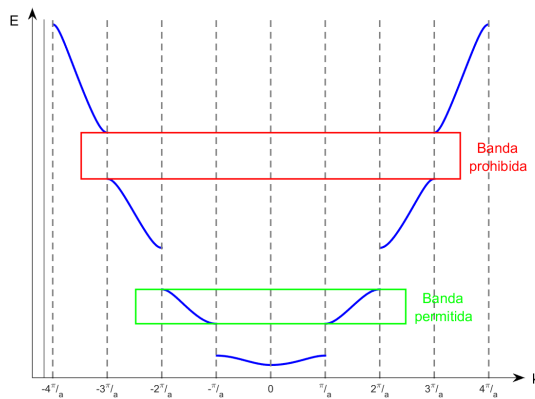


Diagrama en el espacio k

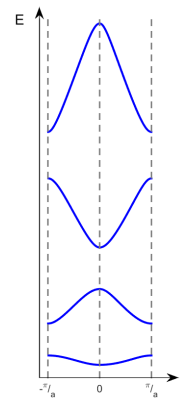
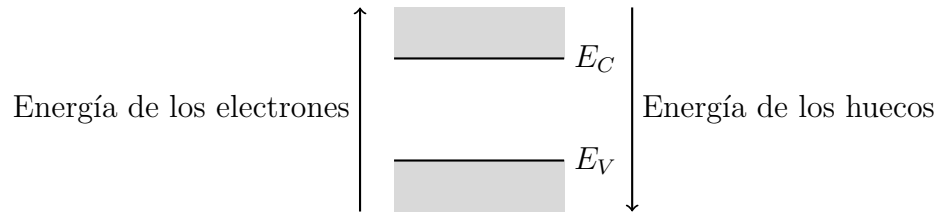


Diagrama en el espacio k reducido

Bandas de valencia y conducción en semiconductores:



Masa efectiva

$$m_n^* = \left(\frac{1}{\hbar^2} \cdot \frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1} \quad \text{para los electrones en la banda de conducción}$$

$$m_p^* = - \left(\frac{1}{\hbar^2} \cdot \frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1} \quad \text{para los huecos en la banda de valencia}$$

En ambos casos $E(k)$ es la energía de un electrón en la banda de energía correspondiente.

2.7.2. Mecánica estadística

Densidad de estados en función de la energía

$$g_c(E) = \frac{4\pi \cdot (2m_n^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \cdot \sqrt{E - E_C} \quad \text{En la banda de conducción.}$$

$$g_v(E) = \frac{4\pi \cdot (2m_p^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \cdot \sqrt{E_V - E} \quad \text{En la banda de valencia.}$$

Distribución de Fermi-Dirac

$$f_F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)} \quad E_F = \text{Nivel de Fermi}$$

$$1 - f_F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_F - E}{kT}\right)}$$

Aproximación de Boltzmann:

$$f_F(E) \approx e^{-\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)} \quad \text{Si } E - E_F \gg kT$$

$$1 - f_F(E) \approx e^{-\left(\frac{E_F - E}{kT}\right)} \quad \text{Si } E_F - E \gg kT$$

En este caso $\gg kT$ significa, usualmente, $\geq 3kT$.

2.7.3. Semiconductores en equilibrio

Nivel de Fermi intrínseco

$$E_{F_i} = E_{midgap} + \frac{3}{4} \cdot kT \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right) \approx E_{midgap} \quad E_{midgap} = \frac{E_C + E_V}{2}$$

$$E_{F_i} = E_{midgap} + \frac{1}{2} \cdot kT \ln \left(\frac{N_V}{N_C} \right)$$

Densidades de portadores:

Aunque se presentan expresiones para N_C , N_V y n_i es conveniente obtener esos valores a partir de una tabla.

$$n_0 = N_C \exp \left(-\frac{(E_C - E_F)}{kT} \right) \quad N_C = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

$$p_0 = N_V \exp \left(-\frac{(E_F - E_V)}{kT} \right) \quad N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

$$n_i^2 = n_0 p_0 = N_C N_V \exp \left(-\frac{E_g}{kT} \right) \quad E_g = E_C - E_V$$

$$n_0 = n_i \cdot \exp \left(\frac{E_F - E_{F_i}}{kT} \right) \quad p_0 = n_i \cdot \exp \left(\frac{E_{F_i} - E_F}{kT} \right)$$

$$n_0 = \frac{(N_d - N_a)}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_d - N_a}{2} \right)^2 + n_i^2} \quad p_0 = \frac{(N_a - N_d)}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_a - N_d}{2} \right)^2 + n_i^2}$$

N_d = Densidad de donadores N_a = Densidad de aceptores

Para un semiconductor tipo n es válida la aproximación:

$$n_0 = N_d - N_a \quad p_0 = \frac{n_i^2}{N_d - N_a} \quad \text{Usualmente } N_a = 0$$

Para un semiconductor tipo p es válida la aproximación:

$$p_0 = N_a - N_d \quad n_0 = \frac{n_i^2}{N_a - N_d} \quad \text{Usualmente } N_d = 0$$

Nivel de Fermi:

$$E_F = E_C - kT \ln \left(\frac{N_C}{n_0} \right) = E_V + kT \ln \left(\frac{N_V}{p_0} \right)$$

$$E_F - E_{F_i} = kT \ln \left(\frac{n_0}{n_i} \right) \quad E_{F_i} - E_F = kT \ln \left(\frac{p_0}{n_i} \right)$$

Variación de la densidad intrínseca de portadores con respecto a la temperatura:

$$n_i(T) = A_0 \cdot T^{3/2} \cdot e^{-E_g/2kT} \quad A_0 = \sqrt{N_C N_V}$$

$$\ln(n_i(x)) = \ln(A_0) - \frac{3}{2} \cdot \ln(x) - \frac{E_g}{2k} \cdot x \quad x = \frac{1}{T}$$

Suponiendo que E_g no depende de la temperatura:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(n_i(x))}{\frac{E_g}{2k} x} = -1 \Rightarrow \ln(n_i(x)) \approx \frac{-E_g}{2k} x$$

Es necesario comprobar esta aproximación en caso de utilizarla. En general solo se utiliza la pendiente de la recta, por lo que basta con comprobar que $\frac{E_g}{2k} \gg \frac{3}{2x}$, pues:

$$\frac{\partial \ln(n_i(x))}{\partial x} = -\frac{3}{2x} - \frac{E_g}{2k}$$

Variación de la densidad de portadores con respecto a la temperatura en semiconductores dopados:

Número de impurezas ionizadas:

$$N_d^+ = \frac{N_d}{1 + 2 \cdot \exp\left(\frac{E_d - E_F}{kT}\right)} \quad E_d = \text{Nivel de energía del electrón adicional de un donador.}$$

$$N_a^- = \frac{N_a}{1 + 4 \cdot \exp\left(\frac{E_a - E_F}{kT}\right)} \quad E_d = \text{Nivel de energía del electrón faltante en un aceptor.}$$

Para semiconductores tipo n a temperaturas bajas es válida la aproximación:

$$n_0 = -\frac{(N^* + N_a)}{2} + \sqrt{\frac{(N^* + N_a)^2}{4} + N^* \cdot (N_d - N_a)} \quad N^* = \frac{N_C}{2} \cdot \exp\left(\frac{E_d - E_C}{kT}\right)$$

Para semiconductores tipo p a temperaturas bajas es válida la aproximación:

$$p_0 = -\frac{(P^* + N_d)}{2} + \sqrt{\frac{(P^* + N_d)^2}{4} + P^* \cdot (N_a - N_d)} \quad P^* = \frac{N_V}{4} \cdot \exp\left(\frac{E_V - E_a}{kT}\right)$$

A temperaturas altas todos los semiconductores se comportan como si fuesen intrínsecos ($p_0 = n_0 = n_i$).

2.7.4. Conducción en los sólidos

Ley de Ohm:

$$J = \sigma \mathcal{E} \qquad \mathcal{E} = \text{Campo eléctrico.}$$

Conductividad de un metal:

$$\sigma = nq\mu_n \qquad n = \text{densidad de electrones en la banda de conducción}$$

$$\mu = \frac{\bar{v}_d}{\mathcal{E}} = \text{movilidad de un electrón.}$$

$$q = \text{valor absoluto de la carga de un electrón.}$$

Conductividad de un semiconductor:

$$\sigma = q(\mu_n n + \mu_p p) \qquad p = \text{densidad de huecos en la banda de valencia}$$

Corriente de arrastre en semiconductores

$$J_{n_{drift}} = q\mu_n n \mathcal{E} \qquad J_{p_{drift}} = q\mu_p p \mathcal{E}$$

$$J_{drift} = J_{n_{drift}} + J_{p_{drift}} = \sigma \mathcal{E} \quad (\text{Ley de Ohm})$$

Corriente de difusión

$$J_{n_{diff}} = qD_n \frac{dn(x)}{dx} \qquad J_{p_{diff}} = -qD_p \frac{dp(x)}{dx}$$

$$J_{diff} = J_{n_{diff}} + J_{p_{diff}}$$

Densidades de corriente:

$$J_n = J_{n_{drift}} + J_{n_{diff}} = q\mu_n n \mathcal{E} + qD_n \frac{dn(x)}{dx}$$

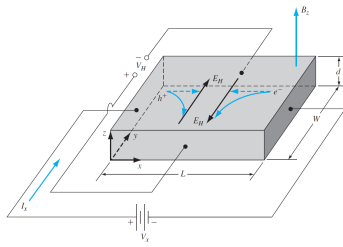
$$J_p = J_{p_{drift}} + J_{p_{diff}} = q\mu_p p \mathcal{E} - qD_p \frac{dp(x)}{dx}$$

$$J = J_n + J_p = J_{drift} + J_{diff} = q\mu_n n \mathcal{E} + q\mu_p p \mathcal{E} + qD_n \frac{dn(x)}{dx} - qD_p \frac{dp(x)}{dx}$$

Relación de Einstein

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p} = \frac{kT}{q}$$

Efecto Hall:



Metales y semiconductores tipo n:

$$V_H = -\frac{I_x B_z}{qnd} \quad \frac{I_x}{Wd} = \frac{qn\mu_n V_x}{L}$$

Semiconductores tipo p:

$$V_H = -\frac{I_x B_z}{qp d} \quad \frac{I_x}{Wd} = \frac{qp\mu_p V_x}{L}$$

2.7.5. Semiconductores fuera de equilibrio

Exceso de portadores:

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \delta n & \delta n &= \text{Exceso de electrones} \\ p &= p_0 + \delta p & \delta p &= \text{Exceso de huecos} \end{aligned}$$

Note que δn y δp pueden ser negativos. En lo siguiente se asumirá $\delta n = \delta p$.

Generación y recombinación en equilibrio térmico:

$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} = \frac{dp(t)}{dt} &= \alpha_r \cdot (n_i^2 - n(t)p(t)) & \alpha_r \cdot n_i^2 &= \text{Tasa de generación en equilibrio térmico} \\ & & -\alpha_r \cdot n(t)p(t) &= \text{Tasa de recombinación en equilibrio térmico} \end{aligned}$$

Baja inyección:

Para materiales de tipo n:

$$\begin{aligned} n_0 \gg \delta p & \Rightarrow \frac{d(\delta n(t))}{dt} = -\frac{\delta p}{\tau_p} \\ \tau_p &= (\alpha_r n_0)^{-1} = \text{Tiempo de vida medio de los huecos} \end{aligned}$$

Para materiales de tipo p:

$$\begin{aligned} p_0 \gg \delta n & \Rightarrow \frac{d(\delta n(t))}{dt} = -\frac{\delta n}{\tau_n} \\ \tau_n &= (\alpha_r p_0)^{-1} = \text{Tiempo de vida medio de los electrones} \end{aligned}$$

Note que las ecuaciones de la derecha sólo son válidas en equilibrio térmico. En general hay que utilizar la ecuación de continuidad, o, preferiblemente, la ecuación de transporte ambipolar. De igual manera, note que si n_0 y p_0 varían con la posición, como consecuencia, por ejemplo, de dopaje no uniforme, entonces τ_n y τ_p también varían con la posición.

Ecuación de continuidad:

Para los electrones:

$$D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu_n \left(\mathcal{E} \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) + g'_n - R'_n = \frac{\partial(\delta n)}{\partial t}$$

Para los huecos:

$$D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu_p \left(\mathcal{E} \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) + g'_p - R'_p = \frac{\partial(\delta p)}{\partial t}$$

Donde:

$$\begin{aligned} g'_n &= \text{Tasa de generación de electrones en exceso} \\ g'_p &= \text{Tasa de generación de huecos en exceso} \\ g'_n &= g'_p = g' \\ R'_n &= \text{Tasa de recombinación de electrones en exceso} \\ R'_p &= \text{Tasa de recombinación de huecos en exceso} \\ R'_n &= R'_p = R' \end{aligned}$$

Si las concentraciones en equilibrio n_0 y p_0 son uniformes (es decir, no varían con x), entonces la ecuación de continuidad puede escribirse como:

$$\begin{aligned} D_n \frac{\partial^2(\delta n)}{\partial x^2} + \mu_n \left(\mathcal{E} \frac{\partial(\delta n)}{\partial x} + n \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) + g'_n - \frac{\delta n}{\tau_n} &= \frac{\partial(\delta n)}{\partial t} & (\text{electrones}) \\ D_p \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} - \mu_p \left(\mathcal{E} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} + p \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) + g'_p - \frac{\delta p}{\tau_p} &= \frac{\partial(\delta p)}{\partial t} \end{aligned}$$

Ecuación de transporte ambipolar:

$$\begin{aligned} D' \frac{\partial^2(\delta n)}{\partial x^2} + \mu' \mathcal{E} \frac{\partial(\delta n)}{\partial x} + g' - R' &= \frac{\partial(\delta n)}{\partial t} & D' = \frac{D_n D_p (p + n)}{\mu_n n + \mu_p p} \\ R' = \text{Tasa de recombinación de los portadores en exceso} & & \mu' = \frac{\mu_n \mu_p (p - n)}{D_n n + D_p p} \end{aligned}$$

Para materiales de tipo p con baja inyección la ecuación se reduce a:

$$D_n \frac{\partial^2(\delta n)}{\partial x^2} + \mu_n \mathcal{E} \frac{\partial(\delta n)}{\partial x} + g' - \frac{\delta n}{\tau_n} = \frac{\partial(\delta n)}{\partial t}$$

Para materiales de tipo n con baja inyección la ecuación se reduce a:

$$D_p \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} - \mu_p \mathcal{E} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} + g' - \frac{\delta p}{\tau_p} = \frac{\partial(\delta p)}{\partial t}$$

Longitudes de difusión:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = \text{Longitud de difusión de los huecos}$$
$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n} = \text{Longitud de difusión de los electrones}$$

Referencias

- Hu, C. (2010). *Modern Semiconductor Devices for Integrated Circuits*. Prentice Hall. ISBN 9780136085256.
- Neamen, Donald A. (2012). *Semiconductor Physics and Devices, Basic Principles*. McGraw-Hill, 4^a edición.
- Streetman, Ben G. y Kumar Banerjee, Sanjay (2006). *Solid State Electronics Devices*. Pearson, 6^a edición.
- Van Zeghbroeck, Bart (2011). «Principles of Semiconductor Devices».
<https://ecee.colorado.edu/~bart/book/book/book/title.htm>